Árvore geradora mínima

CLRS Cap 23

Árvore geradora mínima

Seja G um grafo conexo.

Uma árvore T em G é geradora
se contém todos os vértices de G.

Árvore geradora mínima

Seja G um grafo conexo.

Uma árvore T em G é geradora
se contém todos os vértices de G.

Problema: Dado G conexo com custo c_e para cada aresta e,
encontrar árvore geradora em G de custo mínimo.

Árvore geradora mínima

Seja G um grafo conexo.

Uma árvore T em G é geradora
se contém todos os vértices de G.

Problema: Dado G conexo com custo c_e para cada aresta e, encontrar árvore geradora em G de custo mínimo.

O custo de uma árvore é a soma do custo de suas arestas.

Árvore geradora mínima

Seja G um grafo conexo.

Uma árvore T em G é geradora
se contém todos os vértices de G.

Problema: Dado G conexo com custo c_e para cada aresta e,
encontrar árvore geradora em G de custo mínimo.

O custo de uma árvore é a soma do custo de suas arestas.

Tal árvore é chamada de árvore geradora mínima em G.

Árvore geradora mínima

Seja G um grafo conexo.

Uma árvore T em G é geradora
se contém todos os vértices de G.

Problema: Dado G conexo com custo c_e para cada aresta e, encontrar árvore geradora em G de custo mínimo.

O custo de uma árvore é a soma do custo de suas arestas.

Tal árvore é chamada de árvore geradora mínima em G.

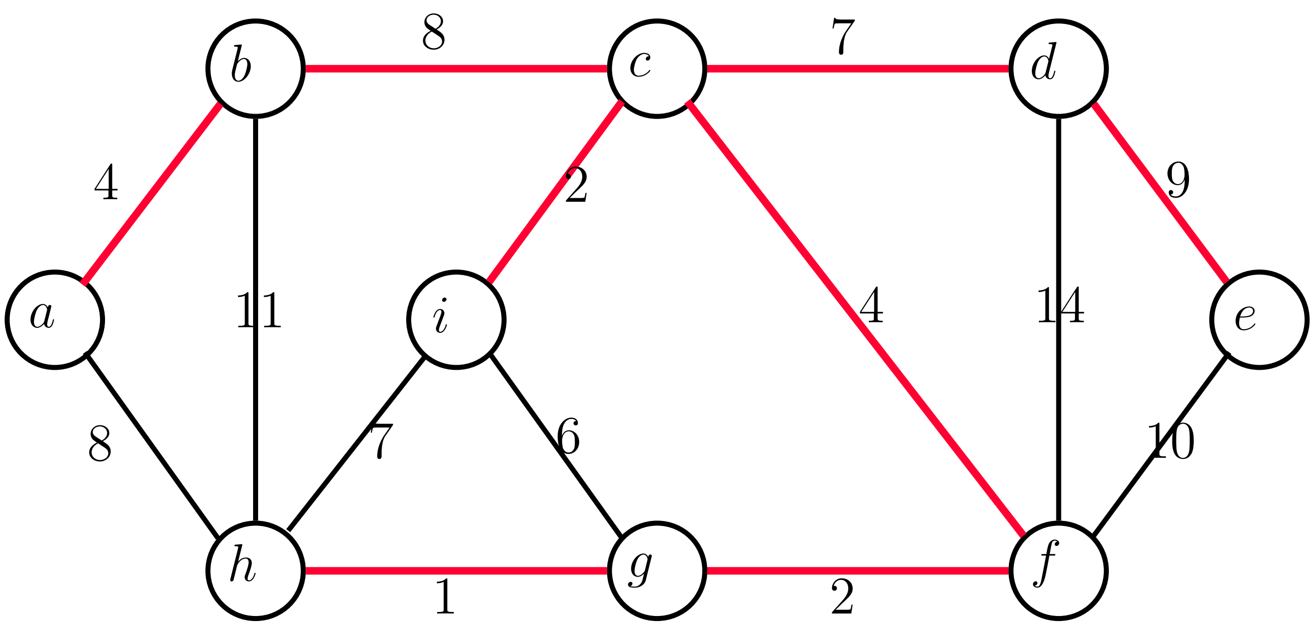
MST: minimum spanning tree

Árvore geradora mínima

Seja G um grafo conexo.

Uma árvore T em G é geradora
se contém todos os vértices de G.

Problema: Dado G conexo com custo c_e para cada aresta e,
encontrar árvore geradora mínima em G.



Arestas seguras

Seja $G = (V, E)$ um grafo conexo.
Função c que atribui um custo c_e para cada aresta $e \in E$.

$A \subseteq E$ contido em alguma MST de (G, c).

Arestas seguras

Seja $G = (V, E)$ um grafo conexo.
Função c que atribui um custo c_e para cada aresta $e \in E$.

$A \subseteq E$ contido em alguma MST de (G, c).

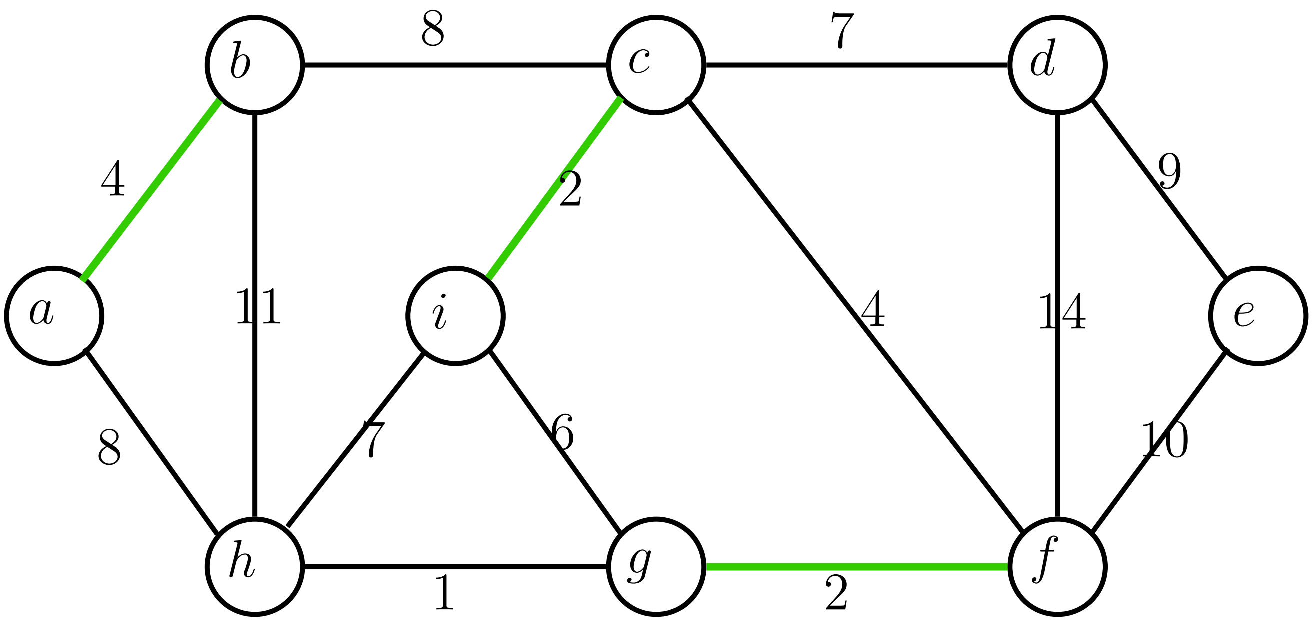
Aresta $e \in E$ é segura para A se
$A \cup \{e\}$ está contido em alguma MST de (G, c).

Arestas seguras

Seja $G = (V, E)$ um grafo conexo.
Função c que atribui um custo c_e para cada aresta $e \in E$.

$A \subseteq E$ contido em alguma MST de (G, c).

Aresta $e \in E$ é segura para A se
$A \cup \{e\}$ está contido em alguma MST de (G, c).

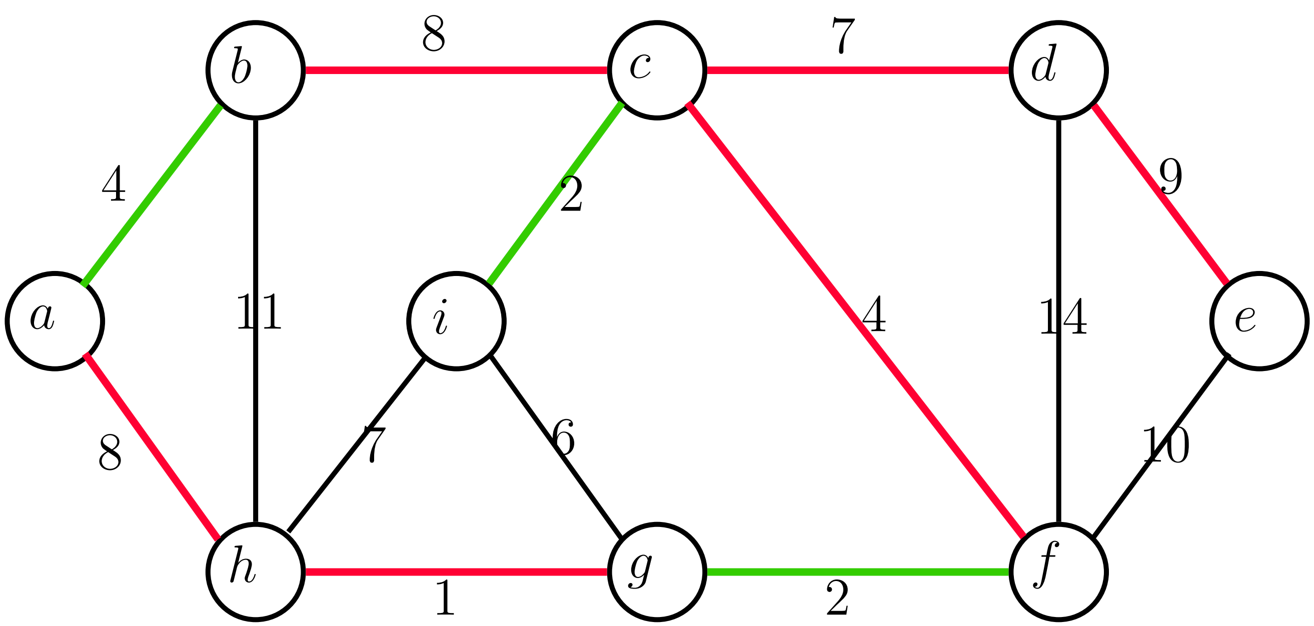


Arestas seguras

Seja $G = (V, E)$ um grafo conexo.
Função c que atribui um custo c_e para cada aresta $e \in E$.

$A \subseteq E$ contido em alguma MST de (G, c).

Aresta $e \in E$ é segura para A se
$A \cup \{e\}$ está contido em alguma MST de (G, c).



Arestas seguras

Seja $G = (V, E)$ um grafo conexo.
Função w que atribui um custo c_e para cada aresta $e \in E$.

$A \subseteq E$ contido em alguma MST de (G, c).

Aresta $e \in E$ é segura para A se
$A \cup \{e\}$ está contido em alguma MST de (G, c).

Se A não é uma MST, então existe aresta segura para A.

Arestas seguras

Seja $G = (V, E)$ um grafo conexo.
Função w que atribui um custo c_e para cada aresta $e \in E$.

$A \subseteq E$ contido em alguma MST de (G, c).

Aresta $e \in E$ é segura para A se
$A \cup \{e\}$ está contido em alguma MST de (G, c).

Se A não é uma MST, então existe aresta segura para A.

GENÉRICO (G, c)
$A \leftarrow \emptyset$
enquanto A não é geradora **faça**
  encontre aresta segura e para A
  $A \leftarrow A \cup \{e\}$
devolva A

Arestas seguras

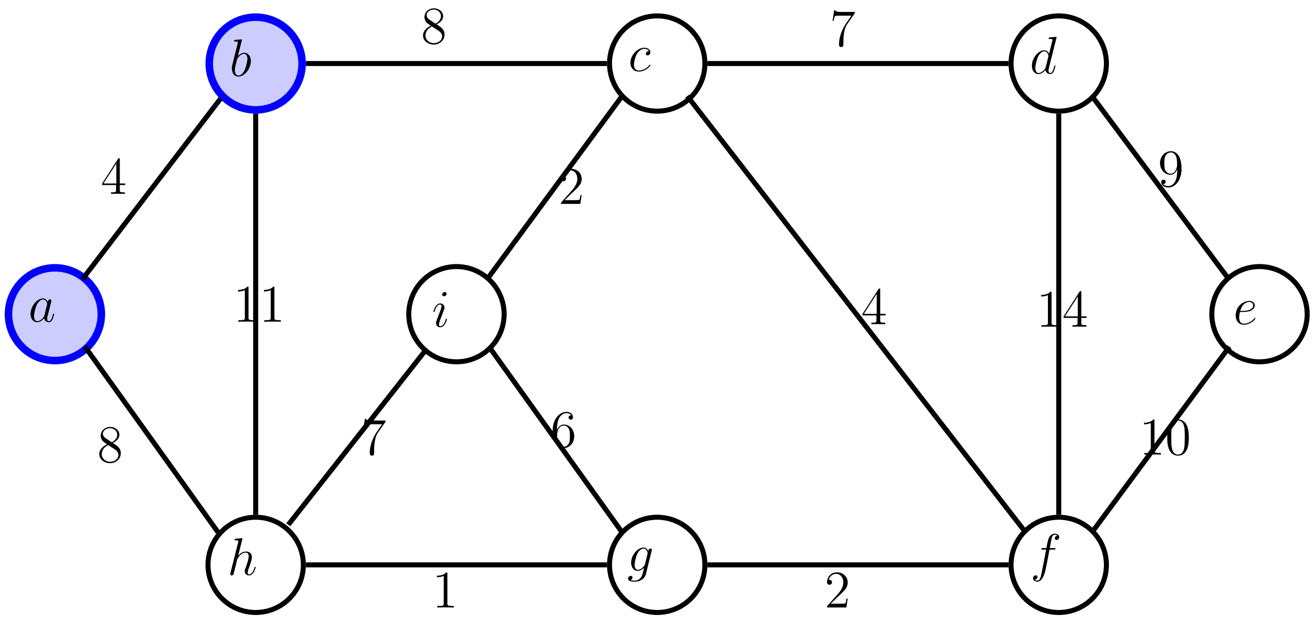
Corte em G: partição $(S, V \setminus S)$.

Aresta e cruza o corte $(S, V \setminus S)$ se
exatamente um de seus extremos está em S.

Arestas seguras

Corte em G: partição $(S, V \setminus S)$.

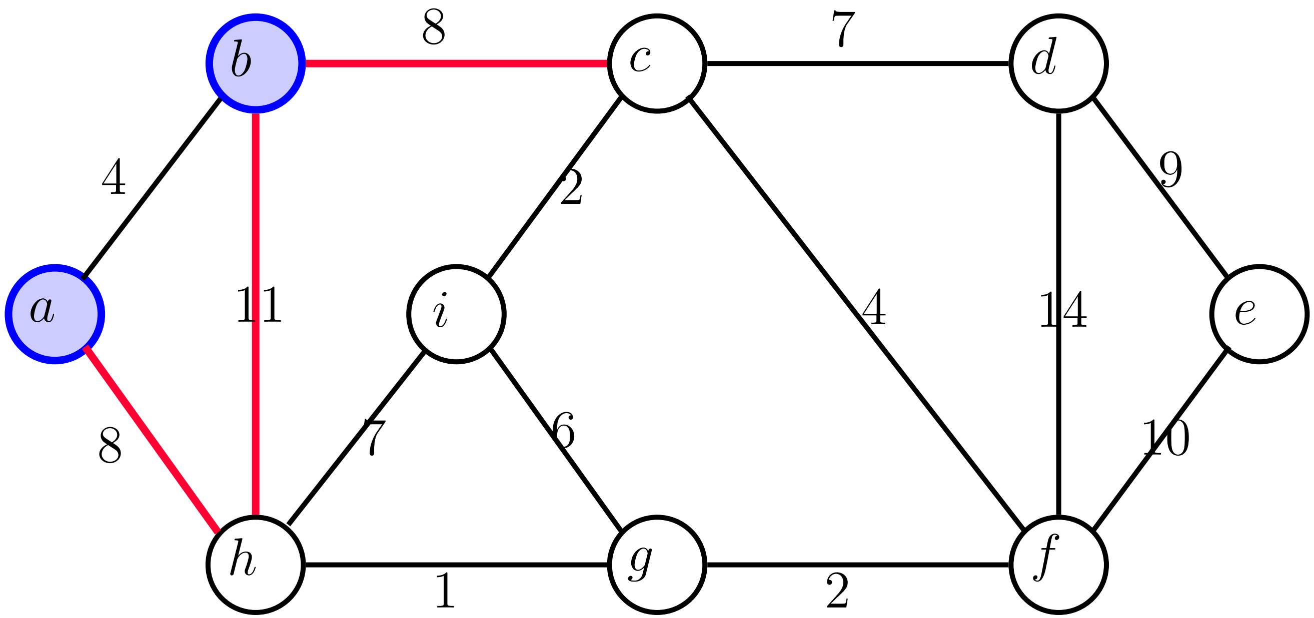
Aresta e cruza o corte $(S, V \setminus S)$ se
exatamente um de seus extremos está em S.



Arestas seguras

Corte em G: partição $(S, V \setminus S)$.

Aresta e cruza o corte $(S, V \setminus S)$ se
exatamente um de seus extremos está em S.



Arestas seguras

Corte em G: partição $(S, V \setminus S)$.

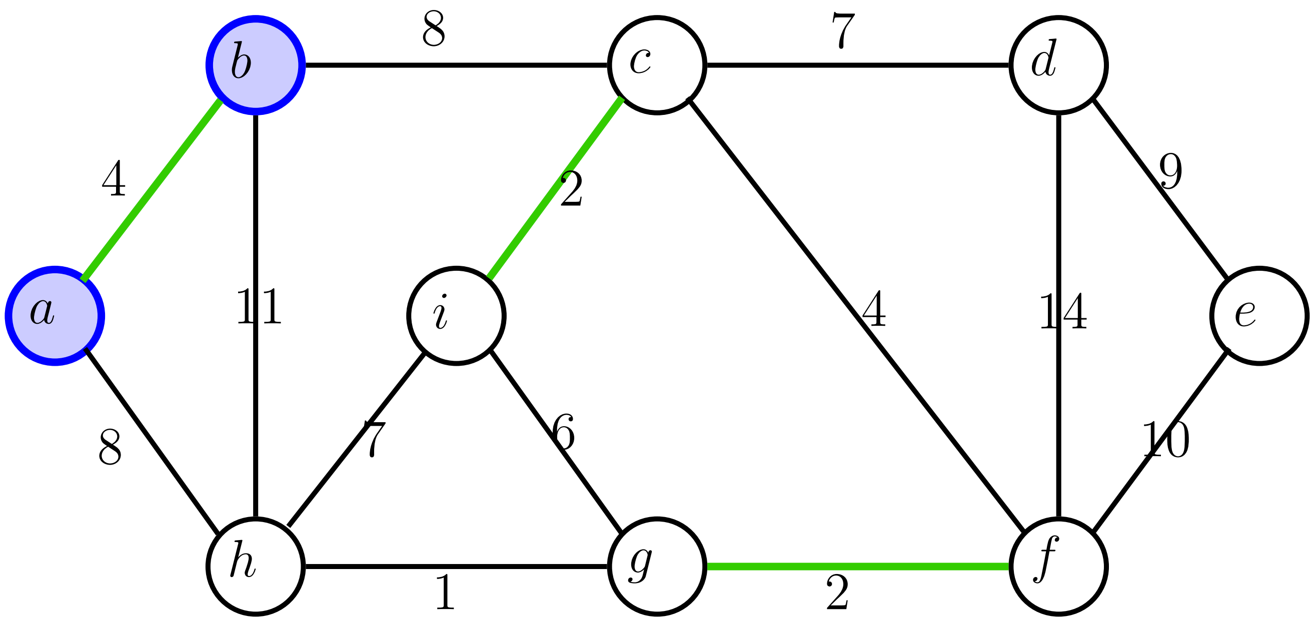
Aresta e cruza o corte $(S, V \setminus S)$ se
exatamente um de seus extremos está em S.

Arestas seguras

Corte em G: partição $(S, V \setminus S)$.

Aresta e cruza o corte $(S, V \setminus S)$ se
exatamente um de seus extremos está em S.

Corte respeita $A \subseteq E$: nenhuma aresta de A o cruza.

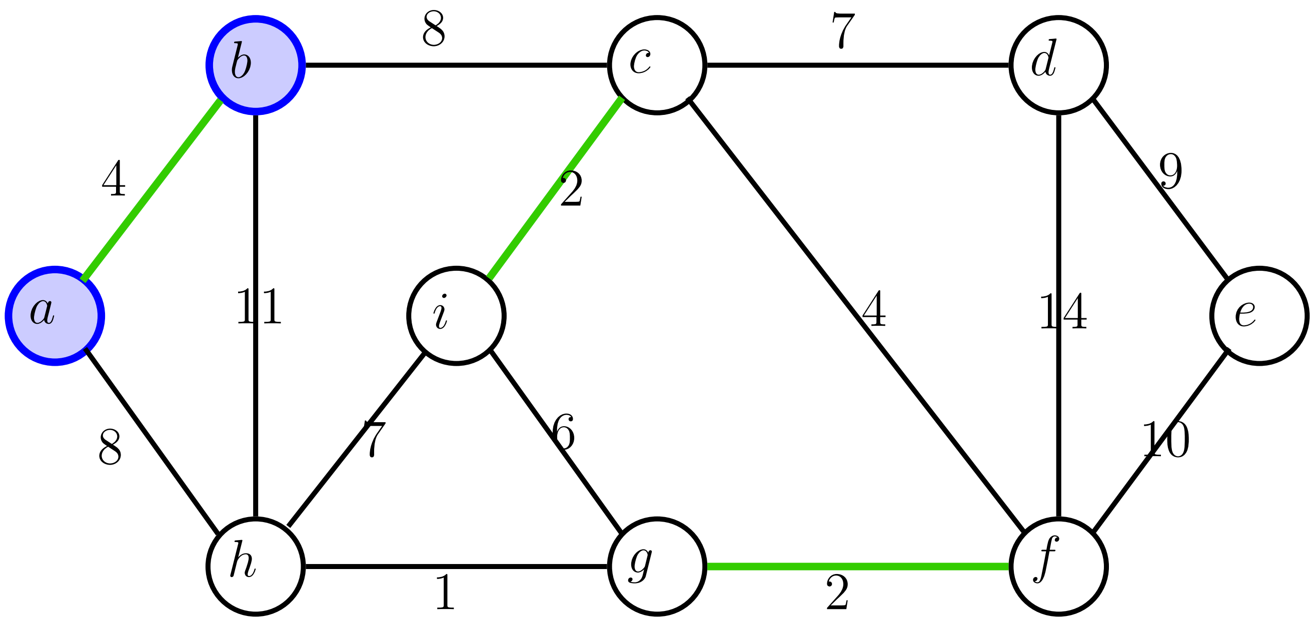


Arestas seguras

Corte em G: partição $(S, V \setminus S)$.

Aresta e cruza o corte $(S, V \setminus S)$ se
exatamente um de seus extremos está em S.

Corte respeita $A \subseteq E$: nenhuma aresta de A o cruza.



Teorema: Se A está contida em MST de (G, c), então e com $c(e)$ mínimo em corte que respeita A é segura para A.

Arestas seguras

Corte em G: partição $(S, V \setminus S)$.

Aresta e cruza o corte $(S, V \setminus S)$ se
exatamente um de seus extremos está em S.

Corte respeita $A \subseteq E$: nenhuma aresta de A o cruza.

Teorema: Se A está contida em MST de (G, c), então e com $c(e)$ mínimo em corte que respeita A é segura para A.

Arestas seguras

Corte em G: partição $(S, V \setminus S)$.

Aresta e cruza o corte $(S, V \setminus S)$ se
exatamente um de seus extremos está em S.

Corte respeita $A \subseteq E$: nenhuma aresta de A o cruza.

Teorema: Se A está contida em MST de (G, c), então e com $c(e)$ mínimo em corte que respeita A é segura para A.

Prova: Seja T uma MST em (G, c) que contém A.
Se e está em T, não há nada mais a provar.

Arestas seguras

Corte em G: partição $(S, V \setminus S)$.

Aresta e cruza o corte $(S, V \setminus S)$ se
exatamente um de seus extremos está em S.

Corte respeita $A \subseteq E$: nenhuma aresta de A o cruza.

Teorema: Se A está contida em MST de (G, c), então e com $c(e)$ mínimo em corte que respeita A é segura para A.

Prova: Seja T uma MST em (G, c) que contém A.
Se e está em T, não há nada mais a provar.

Se e não está em T, seja C o único circuito em $T + e$, e seja $f \in C$ com $c(f)$ máximo que cruza o mesmo corte (distinta de e em caso de empate).

Arestas seguras

Corte em G: partição $(S, V \setminus S)$.

Aresta e cruza o corte $(S, V \setminus S)$ se
exatamente um de seus extremos está em S.

Corte respeita $A \subseteq E$: nenhuma aresta de A o cruza.

Teorema: Se A está contida em MST de (G, c), então e com $c(e)$ mínimo em corte que respeita A é segura para A.

Prova: Seja T uma MST em (G, c) que contém A.
Se e está em T, não há nada mais a provar.

Se e não está em T, seja C o único circuito em $T + e$,
e seja $f \in C$ com $c(f)$ máximo que cruza o mesmo corte
(distinta de e em caso de empate).

Então $T' := T + e - f$ é MST e contém $A \cup \{e\}$. ∎

Árvore geradora mínima

Os dois próximos algoritmos se enquadram no genérico.

Árvore geradora mínima

Os dois próximos algoritmos se enquadram no genérico.

O primeiro é o algoritmo de Kruskal que, em cada iteração, escolhe uma aresta segura mais barata possível.

O algoritmo de Kruskal vai aumentando uma floresta.

Árvore geradora mínima

Os dois próximos algoritmos se enquadram no genérico.

O primeiro é o algoritmo de Kruskal que, em cada iteração, escolhe uma aresta segura mais barata possível.

O algoritmo de Kruskal vai aumentando uma floresta.

O segundo é o algoritmo de Prim,
que mantém uma árvore T que contém um vértice s,
acrescentando em cada iteração uma aresta segura a T.

Árvore geradora mínima

Os dois próximos algoritmos se enquadram no genérico.

O primeiro é o algoritmo de Kruskal que, em cada iteração, escolhe uma aresta segura mais barata possível.

O algoritmo de Kruskal vai aumentando uma floresta.

O segundo é o algoritmo de Prim,
que mantém uma árvore T que contém um vértice s,
acrescentando em cada iteração uma aresta segura a T.

Os dois produzem uma MST de (G, c).

$n := |V(G)|$ e $m := |E(G)|$.

Algoritmo de Kruskal

KRUSKAL (G, c)

$A \leftarrow \emptyset$
sejam $e_1, \ldots, e_m$ as arestas de G ordenadas por c
para cada $u \in V(G)$ **faça** MAKESET(u)
para $i \leftarrow 1$ **até** m **faça**
    sejam u e v as pontas de e_i
    se FINDSET$(u) \neq$ FINDSET(v)
        então $A \leftarrow A \cup \{e_i\}$
                UNION(u, v)
devolva A

Algoritmo de Kruskal

KRUSKAL (G, c)
```
A ← ∅
sejam e_1, ..., e_m as arestas de G ordenadas por c
para cada u ∈ V(G) faça MAKESET(u)
para i ← 1 até m faça
    sejam u e v as pontas de e_i
    se FINDSET(u) ≠ FINDSET(v)
        então A ← A ∪ {e_i}
              UNION(u, v)
devolva A
```

- MAKESET(x): cria conjunto unitário com elemento x;
- FINDSET(x): devolve identificador do conjunto da partição que contém x;
- UNION(x, y): substitui os conjuntos da partição que contêm x e y pela união deles.

Algoritmo de Kruskal

```
KRUSKAL (G, c)
1   A ← ∅
2   sejam e_1, ..., e_m as arestas de G ordenadas por c
3   para cada u ∈ V(G) faça MAKESET(u)
5   para i ← 1 até m faça
6       sejam u e v as pontas de e_i
7       se FINDSET(u) ≠ FINDSET(v)
8           então A ← A ∪ {e_i}
9                 UNION(u, v)
10  devolva A
```

Correção:

Note que e_i na linha 8 é uma aresta segura para A.

Union-Find

ED boa para representar uma partição de um conjunto, e as seguintes operações sobre a partição:

Union-Find

ED boa para representar uma partição de um conjunto, e as seguintes operações sobre a partição:

- MAKESET(x): cria conjunto unitário com elemento x;
- FINDSET(x): devolve identificador do conjunto da partição que contém x;
- UNION(x, y): substitui os conjuntos da partição que contêm x e y pela união deles.

Union-Find

ED boa para representar uma partição de um conjunto, e as seguintes operações sobre a partição:

- MAKESET(x): cria conjunto unitário com elemento x;
- FINDSET(x): devolve identificador do conjunto da partição que contém x;
- UNION(x, y): substitui os conjuntos da partição que contêm x e y pela união deles.

Custo de pior caso de cada operação: $\mathrm{O}(\lg n)$.

Algoritmo de Kruskal

KRUSKAL (G, c)

$A \leftarrow \emptyset$
sejam $e_1, \ldots, e_m$ as arestas de G ordenadas por c
para cada $u \in V(G)$ **faça** MAKESET(u)
para $i \leftarrow 1$ **até** m **faça**
    sejam u e v as pontas de e_i
    se FINDSET$(u) \neq$ FINDSET(v)
        então $A \leftarrow A \cup \{e_i\}$
            UNION(u, v)
devolva A

Consumo de tempo do union-find:

MAKESET : $\mathrm{O}(1)$ FINDSET e UNION : $\mathrm{O}(\lg n)$

Algoritmo de Kruskal

```
KRUSKAL (G, c)
  A ← ∅
  sejam e_1, ..., e_m as arestas de G ordenadas por c
  para cada u ∈ V(G) faça MAKESET(u)
  para i ← 1 até m faça
      sejam u e v as pontas de e_i
      se FINDSET(u) ≠ FINDSET(v)
          então A ← A ∪ {e_i}
                UNION(u, v)
  devolva A
```

Consumo de tempo do union-find:
MAKESET : $\mathrm{O}(1)$ FINDSET e UNION : $\mathrm{O}(\lg n)$

Consumo de tempo do Kruskal: $\mathrm{O}(m \lg n)$

Árvore geradora mínima

CLRS Cap 23

Árvore geradora mínima

Seja G um grafo conexo.

Uma árvore T em G é geradora
se contém todos os vértices de G.

Problema: Dado G conexo com custo c_e para cada aresta e,
encontrar árvore geradora em G de custo mínimo.

O custo de uma árvore é a soma do custo de suas arestas.

Tal árvore é chamada de árvore geradora mínima em G.

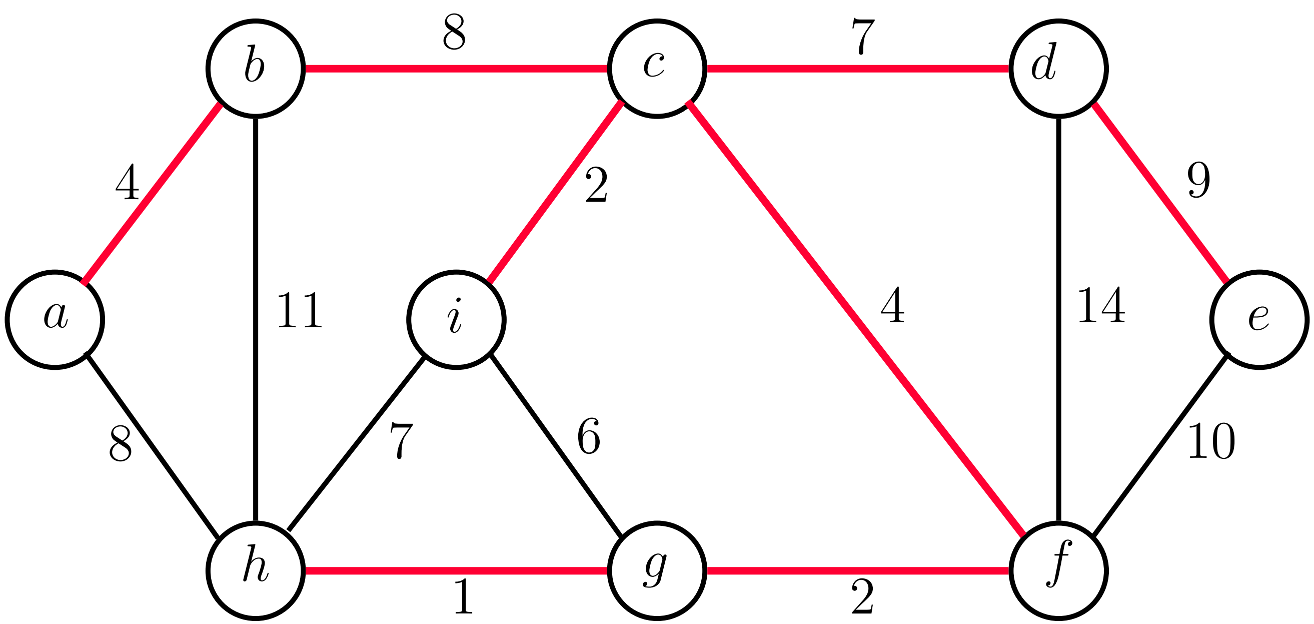
MST: minimum spanning tree

Árvore geradora mínima

Seja G um grafo conexo.

Uma árvore T em G é geradora
se contém todos os vértices de G.

Problema: Dado G conexo com custo c_e para cada aresta e,
encontrar árvore geradora mínima em G.



Algoritmo de Prim

Algoritmo de Prim

PRIM (G, c)

seja s um vértice arbitrário de G
para $v \in V(G) \setminus \{s\}$ **faça** $\mathrm{key}[v] \leftarrow \infty$
$\mathrm{key}[s] \leftarrow 0 \qquad \pi[s] \leftarrow \textsc{nil}$
$Q \leftarrow V(G) \qquad \triangleright$ chave de v é $\mathrm{key}[v]$
enquanto $Q \neq \emptyset$ **faça**
    $u \leftarrow$ EXTRACT-MIN(Q)
    para cada $v \in \mathrm{adj}(u)$ **faça**
        se $v \in Q$ e $c(uv) < \mathrm{key}(v)$
            então $\pi[v] \leftarrow u \quad \mathrm{key}[v] \leftarrow c(uv)$
devolva π

Algoritmo de Prim

```
PRIM (G, c)
 1  seja s um vértice arbitrário de G
 2  para v ∈ V(G) \ {s} faça key[v] ← ∞
 3  key[s] ← 0     π[s] ← NIL
 4  Q ← V(G)     ▷ chave de v é key[v]
 5  enquanto Q ≠ ∅ faça
 6      u ← EXTRACT-MIN(Q)
 7      para cada v ∈ adj(u) faça
 8          se v ∈ Q e c(uv) < key(v)
 9              então π[v] ← u  key[v] ← c(uv)
10  devolva π
```

Se Q for uma lista simples: Linha 4 e EXTRACT-MIN : $\mathrm{O}(n)$

Algoritmo de Prim

PRIM (G, c)

1 seja s um vértice arbitrário de G
2 **para** $v \in V(G) \setminus \{s\}$ **faça** $\mathrm{key}[v] \leftarrow \infty$
3 $\mathrm{key}[s] \leftarrow 0 \quad \pi[s] \leftarrow \textsc{nil}$
4 $Q \leftarrow V(G)$ $\triangleright$ chave de v é $\mathrm{key}[v]$
5 **enquanto** $Q \neq \emptyset$ **faça**
6     $u \leftarrow$ EXTRACT-MIN(Q)
7   **para cada** $v \in \mathrm{adj}(u)$ **faça**
8   **se** $v \in Q$ e $c(uv) < \mathrm{key}(v)$
9   **então** $\pi[v] \leftarrow u \quad \mathrm{key}[v] \leftarrow c(uv)$
10 **devolva** π

Se Q for uma lista simples: Linha 4 e EXTRACT-MIN : $\mathrm{O}(n)$

Consumo de tempo do Prim: $\mathrm{O}(n^2)$

Algoritmo de Prim

PRIM (G, c)
1 seja s um vértice arbitrário de G
2 **para** $v \in V(G) \setminus \{s\}$ **faça** $\text{key}[v] \leftarrow \infty$
3 $\text{key}[s] \leftarrow 0 \quad \pi[s] \leftarrow \text{NIL}$
4 $Q \leftarrow V(G)$ $\quad \triangleright$ chave de v é $\text{key}[v]$
5 **enquanto** $Q \neq \emptyset$ **faça**
6 $\quad u \leftarrow$ EXTRACT-MIN(Q)
7 $\quad$ **para cada** $v \in \text{adj}(u)$ **faça**
8 $\quad\quad$ **se** $v \in Q$ e $c(uv) < \text{key}(v)$
9 $\quad\quad\quad$ **então** $\pi[v] \leftarrow u \;\; \text{key}[v] \leftarrow c(uv)$ $\quad \triangleright$ DecreaseKey
10 **devolva** π

Se Q for uma fila de prioridade:
Linha 4: $\Theta(n)$ EXTRACT-MIN e DECREASE-KEY : $\mathrm{O}(\lg n)$

Algoritmo de Prim

PRIM (G, c)

```
1   seja s um vértice arbitrário de G
2   para v ∈ V(G) \ {s} faça key[v] ← ∞
3   key[s] ← 0     π[s] ← NIL
4   Q ← V(G)     ▷ chave de v é key[v]
5   enquanto Q ≠ ∅ faça
6       u ← EXTRACT-MIN(Q)
7       para cada v ∈ adj(u) faça
8           se v ∈ Q e c(uv) < key(v)
9               então π[v] ← u  key[v] ← c(uv)     ▷ DecreaseKey
10  devolva π
```

Se Q for uma fila de prioridade:
Linha 4: $\Theta(n)$ EXTRACT-MIN e DECREASE-KEY : $\mathrm{O}(\lg n)$
Consumo de tempo do Prim: $\mathrm{O}(m \lg n)$

Algoritmo de Prim

PRIM (G, c)

1 seja s um vértice arbitrário de G
2 **para** $v \in V(G) \setminus \{s\}$ **faça** $\mathrm{key}[v] \leftarrow \infty$
3 $\mathrm{key}[s] \leftarrow 0 \quad \pi[s] \leftarrow \textsc{nil}$
4 $Q \leftarrow V(G)$ $\quad \triangleright$ chave de v é $\mathrm{key}[v]$
5 **enquanto** $Q \neq \emptyset$ **faça**
6 $\quad u \leftarrow$ EXTRACT-MIN(Q)
7 $\quad$ **para cada** $v \in \mathrm{adj}(u)$ **faça**
8 $\quad\quad$ **se** $v \in Q$ e $c(uv) < \mathrm{key}(v)$
9 $\quad\quad\quad$ **então** $\pi[v] \leftarrow u \;\; \mathrm{key}[v] \leftarrow c(uv)$ $\quad \triangleright$ DecreaseKey
10 **devolva** π

Se Q for uma fila de prioridade:
Linha 4: $\Theta(n)$ EXTRACT-MIN e DECREASE-KEY : $\mathrm{O}(\lg n)$
Consumo de tempo do Prim: $\mathrm{O}(m \lg n)$
Consumo de tempo com Fibonacci heap: $\mathrm{O}(m + n \lg n)$

Algoritmo de Prim

PRIM (G, c)

```
seja s um vértice arbitrário de G
para v ∈ V(G) \ {s} faça key[v] ← ∞
key[s] ← 0      π[s] ← NIL
Q ← V(G)      ▷ chave de v é key[v]
enquanto Q ≠ ∅ faça
    u ← EXTRACT-MIN(Q)
    para cada v ∈ adj(u) faça
        se v ∈ Q e c(uv) < key(v)
            então π[v] ← u  key[v] ← c(uv)
devolva π
```

Consumo de tempo

com lista simples: $\mathrm{O}(n^2)$

com fila de prioridade: $\mathrm{O}(m \lg n)$

com Fibonacci heap: $\mathrm{O}(m + n \lg n)$